Marsovske verige

Obravnava t.i. "Marsovskega problema" skozi pregled verjetnosti, markovskih verig in preprostih operacij na matricah.

Lesley Zore [1]

31. julij 2021

Od neolitske revolucije naprej je matematika v središču fiktivnega razvoja v družbi. Kmalu se pojavi zanimanje, tako iz gospodarskih, kot tudi iz življenjskih vidikov, za naključne (psevdo-naključne) procese v okolici. S spremembami zadnjih stoletij postane to področje — verjetnost — dostopno višjemu meščanstvu in vladajočim slojem, med katerimi poraste zanimanje za teorijo matematike [2], [3], [4].

Z raziskovanjem teorije verjetnosti poraste zanimanje za zaporedje večih naključij, možnost za dogodek glede na drugega itd. Kot izraz zaporedij naključij, kjer lahko pridemo iz kateregakoli položaja kamorkoli, v skladu z nekaterimi drugimi pogoji, nastanejo markovske verige. Preko le-teh se v tem članku spopademo s t.i. "MaRSovskim problemom"in raziščemo nekatere druge značilnosti verjetnosti. Ugotovimo, da se premika delež zemljanov z proti $z = 4/19 \approx 0.21$ in delež marsovcev m proti $m = 15/19 \approx 0.78$.

1 Uvod

Vprašanje 1. *Marsovce in Zemljane opazujemo, kako se pomikajo v vrsti. Verjetnost, da stoji za Zemljanom Marsovec, je* 75% *in* 25%, *da za njim stoji Zemljan. Verjetnost, da stoji za Marsovcem Marsovec je* 80% *in* 20%, *da za njim stoji Zemljan. Kolikšen je delež Zemljanov in Marsovcev po* n *premikih in kolikšen je delež, ko gre* n *proti neskončnosti?*

V članku bomo z uporabo Markovskih verig in stacionarnih porazdelitev preko matrik odgovorili na zgornje vprašanje.

Gotovo je odgovor pri n-tem koraku odvisen od začetne vrednosti. V kolikor je na prvem mestu Marsovec, ni mogoče, da bi bili vsi, vključujoč predstavnika začetnega člena, v istem zaporedju Zemljani. Velja tudi nasprotno. Kakorkoli, pri iskanju incidence Zemljanov in Marsovcev ima začetno stanje ob približevanju $n \to \infty$ v primeru z mediano vrednosti v odgovoru zanemarljiv vpliv, ki se bliža 0.

Podani problem je povezan s pogosto zastavljenim vprašanjem, ki predpostavlja vrsto ljudi, ki si zaporedoma sledijo in se med seboj razlikujejo, na kar vpliva predhodni člen. V zvezi s tem poznamo stabilnostne enačbe, kot je sledeča, ki smo jo uporabili tudi v raziskovanju predmetnega problema. [5].

$$\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}$$

2 Verjetnost

Poznamo več definicij verjetnosti. Eno izmed njih imenujemo klasična definicija, ki je navedena spodaj [8].

Definicija 1. *Če ima poskus končno število enako verjetnih izidov, je* ***verjetnost*** *količnik med številom ugodnih izidov oz. izbranih dogodkov in številom vseh možnih izidov. Naj množica* Ω *predstavlja vse možne izide in naj bo dogodek* $A \subseteq \Omega$. *Verjetnost, da se zgodi dogodek* A *izpeljemo tako:*

$$\textit{verjetnost, da se zgodi } A = \frac{\textit{št. ugodnih izidov}}{\textit{št. vseh izidov}}.$$

V kolikor označimo množico ugodnih izidov oziroma dogodkov z A, verjetnost dogodka A s $P(A)$ in množico prostora vseh mogočih dogodkov z Ω, dobimo naslednji zapis zgornje enačbe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Definicija nam pove tudi, da je *dogodek* pojav, ki se pri poskusu (npr. metu kocke) lahko zgodi. Dogodek je namreč podmnožica množice vseh možnih izidov. Dogodek je lahko gotov, nemogoč ali slučajen. Verjetnost gotovega dogodka je 1, nemogočega dogodka 0, verjetnost slučajnega dogodka se giblje med številoma 0 in 1.

Za prikaz oziroma izračun verjetnosti smo si izbrali dobro poznan primer, *met kocke.*

Zgled 1. *Vržemo kocko. Kolikšna je verjetnost, da vržemo število 4? Množico vseh izidov predstavlja* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, dogodek A je, da vržemo število 4. Vidimo, da je verjetnost, da bomo vrgli* 4*:*

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Ob tem opazimo, da je dogodek, da eno izmed števil od 1 *do* 6 *gotov in dogodek, da bomo vrgli hkrati* 4 *in da bo število liho nemogoč.*

Kadar govorimo o verjetnosti, moramo nujno omeniti tudi relacijo med dogodki. Dogodki so med seboj lahko **odvisni** ali **neodvisni**.

Definicija 2. *Dogodka A in B sta* neodvisna*, če velja*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zgled 2. *Kolikšna je verjetnost, da v dveh metih kocke vržemo število* 3 *v prvem metu, nato pa sodo število? V tem primeru je:*

- *dogodek A v* 1*. metu vržemo število* 3*,*
- *dogodek B v* 2*. metu vržemo sodo število,*

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6},$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Dogodka A in B zgoraj sta neodvisna.

Definicija 3. Pogojno verjetnost*, da se zgodi A, če se zgodi B izračunamo [10] po predpisu:*

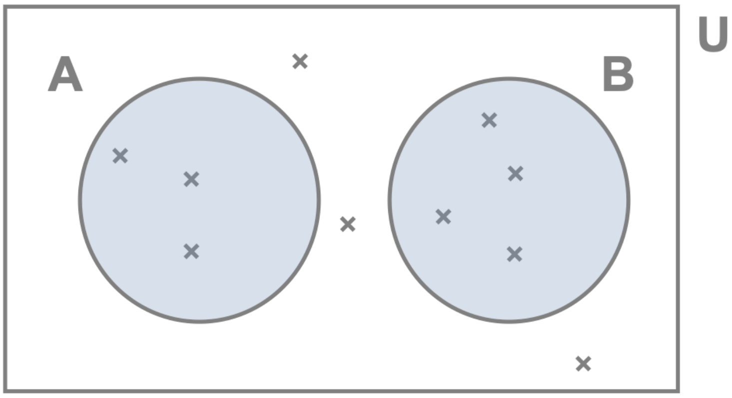
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Omenimo še pojem disjunktnosti dogodkov.

Definicija 4. *Dogodka A in B sta disjunktna, če je njun presek prazna množica*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Če ponazorimo to z Vennovim diagramom, nastane sledeči prikaz [9].



Zgled 3. *Kot preprost primer disjunktivnih dogodkov navedimo met kocke, kjer je dogodek A met števila 5 in dogodek B met števila 4. Verjetnost, da se oba dogodka zgodita istočasno, je enaka 0. Dogodka A in B sta disjunktivna: $A \cap B = \emptyset$.*

3 Uvod v matrike

Matrika je pravokotna razpredelnica elementov. Uporabna je za zapis podatkov, a ko na matrikah definiramo še neke operacije, npr. seštevanje in množenje, opazimo širino njihove namembnosti.

Matrike so sestavljene iz m stolpcev in n vrstic. V našem primeru bodo elementi matrike z intervala $[0, 1]$, zato lahko za matriko P velikosti $m \times n$ pišemo $A \in [0, 1]^{m \times n}$.

Kot zgled uporabe matrik, v podanem zgledu za obravnavo pogojne verjetnosti, lahko služi naslednji primer.

Zgled 4. *Lesley vrže dve pošteni kocki (verjetnost dogodka prikaza katerekoli strani kocke (prikaza posamičnega števila) na vrhu je enaka* $1/6$*). Ve, da je vrgla sodo število. Kolikšna je verjetnost, da ugane prikazano število? V primeru, da bi izbirala med šestimi števili in ugibala, by imela Lesley* $1/6$ *možnosti, da ugane pravo. Znotraj množice možnih dogodkov ("prostora dogodkov")* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *je le polovica sodih, tako, da je množica prostora možnih dogodkov* $\Omega = \{2, 3, 6\}$*. Ugotovimo, da ne izbira med šestimi, le med tremi dogodki. Tako je možnost pravilne izbire enaka* $1/3$*. V matriki lahko zapišemo verjetnosti, da Lesley ugane pravilno ali napačno število, v kolikor ve, da je število sodo in v kolikor ne ve, ali je sodo ali liho:*

$$\begin{bmatrix} \textit{verjetnost uspeha (ve za sodost)} & \textit{verjetnost zmote (ve za sodost)} \\ \textit{verjetnost uspeha (ne ve za sodost)} & \textit{verjetnost zmote (ne ve za sodost)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P(\textit{sodost} \to \textit{uspeh}) & P(\textit{sodost} \to \textit{zmota}) \\ P(? \to \textit{uspeh}) & P(? \to \textit{zmota}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_{su} & p_{sz} \\ p_{?u} & p_{?z} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

4 Markovska veriga in operacije na matrikah kot zapisih markovskih verig

Ruski matematik Andrej Andrejevič Markov (1856-1922) je deloval na področjih teorije števil, verjetnosti in matematične analize. Po njem so poimenovani številni matematični pojmi, med drugim tudi Markovske verige.

Definicija 5. *Zaporedje slučajnih spremenljivk* $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *je* ***Markovska veriga****, če upošteva lastnost Markova. To pomeni, da mora za poljuben* $n \in \mathbb{N}$ *veljati*

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Definicija pravi, da mora biti verjetnost prehoda v naslednje stanje odvisna le od trenutnega stanja. Zgodovina prehodov med stanji pred prihodom v trenutno stanje ne vpliva na verjetnost prehoda v naslednje stanje.

V definiciji Markovskih verig smo omenili *slučajne spremenljivke.* To so matematični objekti z vrednostjo, odvisno od verjetnostnega procesa, prikazanega z markovskimi verigami.

Markovsko verigo predstavimo z množico možnih stanj S, prehodno matriko P in začetno porazdelitvijo μ_0. V tem primeru bomo imeli slučajne spremenljivke $X_0, X_1, X_2, \ldots$, ki bodo odvisne od prehajanja po stanjih iz S.

Oglejmo si primer, ki modelira prehajanje astronavta med prostori vesoljske ladje.

Zgled 5. *Astronavt sedi na hodniku vesoljske ladje, ki kroži okoli Marsa. Hodnik je sestavljen iz štirih odsekov, ki so krožno povezani. Astronavt vsakih pet minut zamenja odsek, v katerem sedi, ali ostane na mestu.*

Delež možnosti, da gre v odsek pred njim je 0.7, *da se premakne en odsek nazaj* 0.2, *da ostane v istem odseku* 0.1. *Sprehod začne v prvem odseku. Izjema je drugi odsek, za katerega velja, da je delež možnosti, da gre v odsek pred njim* 0.3, *da se premakne nazaj* 0.3 *in da ostane v istem odseku* 0.4. *Množica* $S = \{1, 2, 3, 4\}$ *je torej množica stanj, sledeče pa prehodna matrika*

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Za neka $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ *element* p_{ij}, *tj.* i*-ti element* j*-tega stolpca, predstavlja verjetnost prehoda iz* i*-tega v* j*-ti odsek. Z drugimi besedami, če smo v* i*-tem odseku, ugotovimo možnost dogodka prehoda iz tega odseka v odsek* j *tako, da izberemo element na križišču* i*-te vrstice in* j*-tega stolpca. Ker se ukvarjamo z verjetnostjo pri markovskih verigah, je koristno vedeti, da je vsota posamezne vrstice (seštevek verjetnosti možnih prehodov iz posamičnega stanja) vedno enaka* 1.

Vidimo, da je verjetnost dogodka različna glede na trenutno stanje in neodvisna od zgodovine stanj, zato lahko proces predstavimo kot Markovsko verigo.

Zanima nas, kakšna je porazdelitev stanja položaja astronavta po treh izbirah premika. Zarad časovne neučinkovitosti zapisa in njegove preglednosti bomo to izpeljali na matriki dveh stanj; za večje matrike je rezultat podoben.

Pri znanem končnem številu sprememb stanja n dobimo končno porazdelitev tako, da matriko pomnožimo samo s seboj n-krat. Najprej si oglejmo splošno enačbo za množenje matrik, nato omenjeno potenciranje matrike dveh stanj (in sicer za število korakov $n = 3$).

Matrike množimo tako, da med seboj skalarno množimo ustrezne vrstice in stolpce matrik [13]. Naj bosta matriki A in B oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Potem je produkt AB oblike

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

kjer vrednosti c_{ij} izračunamo po enačbi:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Preidimo torej na obljubljen primer matrike dveh stanj, natančneje za število korakov $n = 3$. Označimo

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

in dobimo

$$P^3 = \begin{bmatrix} p_{11}^3 + 2p_{11}p_{12}p_{21} + p_{12}p_{21}p_{22} & p_{11}^2p_{12} + p_{12}^2p_{21} + p_{12}p_{22}^2 + p_{11}p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{21}^2 + p_{11}^2p_{21} + p_{21}p_{22}^2 + p_{11}p_{21}p_{22} & p_{11}p_{12}p_{21} + p_{22}^3 + 2p_{12}p_{21}p_{22} \end{bmatrix}.$$

V vsakem polju matrike se nahaja seštevek verjetnosti vseh možnih poti. Polje prve vrstice in stolpca predststavlja seštevek verjetnosti, da bomo trikrat prešli v identično stanje, tj. $X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 =$

$1, X_3 = 1$, in verjetnosti vseh drugih možnih poti, ki bi nas končno popeljale iz stanja 1 v stanje 1. Njihove vrednosti lahko seštevamo, ker so posamezni izidi – v tem primeru poti dolžine 3 – med seboj disjunktni dogodki.

Zanima nas, kako bi na tej podlagi pridobili obljubljeni odgovor X za 3 korake. Če je

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.95 & 0.05 \end{bmatrix},$$

dobimo

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1097}{2000} & \frac{903}{2000} \\ \frac{5719}{8000} & \frac{2281}{8000} \end{bmatrix}.$$

Razberemo lahko, da je verjetnost, da bomo po treh korakih prišli iz stanja 1 nazaj v stanje 1 enaka $\frac{1097}{2000}$.

V kolikor bi želeli izvedeti, kolikšna je možnost, da po n korakih preidemo po določeni poti iz izbranega stanja x_a v izbrano stanje x_b, zmnožimo med seboj verjetnosti posamičnih prehodov med matrikami, ki bi nas popeljali iz stanja x_a v stanje x_b. Na primeru zgoraj bi verjetnost, da bomo trikrat zapored iz stanja 1 prešli v stanje 1 izračunali kot: $p_{11}^3 = 0.4^3 = 0.064$. Verjetnost, da bomo iz stanja 1 prešli v stanje 2 in v sledečem koraku nazaj v stanje 1 je $p_{12} * p_{21} = 0.4 * 0.05 = 0.02$.

Definicija 6. ***Verjetnostna porazdelitev*** *določa verjetnost, da slučajna spremenljivka zavzame neko vrednost.*

Za slučajno spremenljivko X z vrednostmi v $\{1, 2, \ldots, n\}$ in porazdelitvijo $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n)$ velja $P(X = k) = \mu_k,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Verjetnost, da X zavzame vrednost k je torej μ_k.

Če matriko k-krat pomnožimo (samo s seboj oz. v primeru spreminjajočih se verjetnosti z drugimi), dobimo verjetnostno porazdelitev po k korakih množenja.

Definicija 7. ***Stacionarna porazdelitev*** *Markovske verige s prehodno matriko P je takšna porazdelitev π, ki zadošča pogoju*

$$\pi P = \pi.$$

Pri stacionarni porazdelitvi se verjetnostna porazdelitev po enem koraku ne spremeni. Delitev ohranjala v vseh naslednjih korakih.

Stacionarne porazdelitve imajo pomembno vlogo pri analiziranju Markovskih verig.

Definicija 8. ***Periodičen graf*** *je graf [12] za katerega velja*

$$gcd(|C|; C \text{ cikel v } G_p) > 1,$$

pri čemer je G_p usmerjen graf

$$G_p = (S, i \to j; P_{ij} > 0)$$

.

Definicija 9. ***Krepko povezan graf*** *je graf, v katerem obstaja usmerjena pot med dvema poljubnima točkama. Pot lahko opravimo v obeh smereh.*

Izrek 1. *Za krepko povezane neperiodične Markovske verige velja:*

- *obstaja enolična stacionarna porazdelitev π in*
- $\lim_{n\to\infty} \mu P^n = \pi, \forall \mu$.

Izrek nam pove, da je verjetnost P, da se po dolgo časa (ko pošljemo število korakov $n \to \infty$) znajdemo v stanju i enaka π_i, pri čemer je π_i $i-$ti člen stacionarne porazdelitve π. To velja za vsak μ, ki predstavlja verjetnost vsakega posamičnega dogodka v množici prostora možnih dogodkov. Prav tako je delež preživetega časa v stanju i na dolgi rok enak π_i.

5 MaRSovski problem

Problem 1. *Na neskončni stezi mimo Marsa v vrsti hodijo Zemljani in Marsovci. Trem četrtinam Zemljanov sledi Marsovec, le eni petini Marsovcev sledi Zemljan. V ostalih primerih Zemljanu sledi Zemljan in Marsovcu Marsovec. Kolikšen delež vseh pohodnikov na stezi je Marsovcev in kolikšen Zemljanov po n premikih in ko se število premikov bliža ∞?*

Z MaRSovskim problemom smo se spoprijeli z uporabo matrik. Možni stanji pri tem problemu sta Marsovec in Zemljan. Našo matriko smo označili s P. V matriki P p_{11} predstavlja verjetnost, da za Zemljanom stoji Zemljan, p_{12} verjetnost, da za Zemljanom stoji

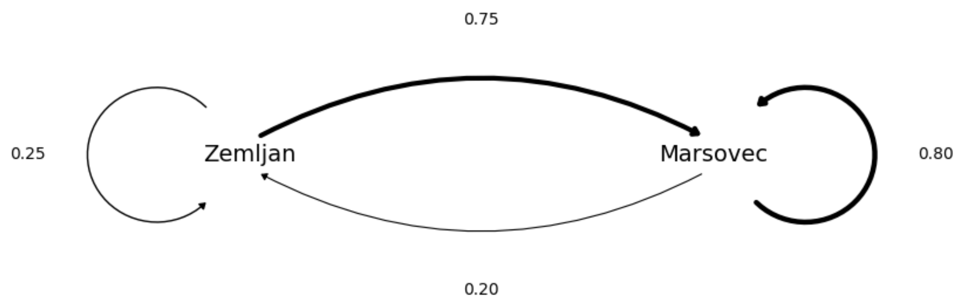
Marsovec, p_{21} verjetnost, da za Marsovcem stoji Zemljan, p_{22} pa verjetnost, da za Marsovcem stoji Marsovec.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

V našem primeru so verjetnosti sledeče.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Porazdelitev lahko predstavimo tudi z naslednjim s programskim jezikom Python ustvarjenim grafom:



Slika 2: Markovska veriga za Marsovski problem.

V zapisu, sledečemu zgledu 5 smo raziskali, kako ugotoviti odgovor na zastavljen problem za znano končno število korakov n. V spodnjem računu so vnešene vrednosti, zastavljene v MaRSovskem problemu.

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$X = P^3 = \begin{bmatrix} \frac{337}{1600} & \frac{1263}{1600} \\ \frac{421}{2000} & \frac{1579}{2000} \end{bmatrix}$$

Zgornja vrstica predstavlja porazdelitev, v kolikor začetno stanje predstavlja Zemljana. Verjetnost, da bomo iz začetnega stanja Zemljana po treh korakih v nespremenjenem stanju je 337/1600 in verjetnost, da bomo v stanju Marsovca, 1263/1600. Verjetnost, da bomo iz začetnega stanja Marsovca po treh korakih v stanju Zemljana je 421/1600 in verjetnost, da bomo v nespremenjenem stanju, 1579/2000.

Pri približevanju $n \to \infty$ iščemo stacionarno porazdelitev. V kolikor je porazdelitev stacionarna, se po enem koraku ne bo spremenila. Veljati mora torej naslednji pogoj, pri katerem v zapisu x_1 predstavlja delež Zemljanov, x_2 delež Marsovcev in vektor $[x_1, x_2]$ neznano stacionarno porazdelitev:

$$P \left[x_1 \quad x_2 \right] = \left[x_1 \quad x_2 \right],$$

kjer je

$$P \left[x_1 \quad x_2 \right] = \left[x_1 p_{11} + x_2 p_{21} \quad x_1 p_{12} + x_2 p_{22} \right],$$

tj.

$$\left[x_1 \quad x_2 \right] = \left[x_1 p_{11} + x_2 p_{21} \quad x_1 p_{12} + x_2 p_{22} \right].$$

Enakost po matričnem zapisu razbijemo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 p_{11} + x_2 p_{21}, \\ x_2 &= x_1 p_{12} + x_2 p_{22}, \\ 1 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Iz druge in tretje enakosti sledi naslednja izpeljava.

$$\begin{aligned} 1 - x_1 &= x_1 p_{12} + (1 - x_1) p_{22} \\ 1 - x_1 &= x_1 p_{12} + p_{22} - x_1 p_{22} \\ 1 - p_{22} &= x_1 + x_1 p_{12} - x_1 p_{22} \\ x_1 &= \frac{1 - p_{22}}{1 + p_{12} - p_{22}} \end{aligned}$$

Če vstavimo podatke iz MaRSovskega problema, dobimo sledeči rezultat.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1-p_{22}}{1+p_{12}-p_{22}} \\
x_1 &= \frac{1-0.8}{1+0.75-0.8} \\
x_1 &= \frac{4}{19} \doteq 0,21 \\
x_2 &= 1-x_1 \\
x_2 &= 1-\frac{4}{19} \\
x_2 &= \frac{15}{19} \doteq 0,79
\end{aligned}
$$

Delež Marsovcev na stezi je $\frac{15}{19}$. Delež Zemljanov na stezi je $\frac{4}{19}$.

Literatura

[1] Ž. H. Petrovski, predavanja na MaRS 2021, sodelovanje, 25.-31.7.2021.

[2] F. Engels, The Origin of The Family, Private Property, And The State. Unknown, Zürich, 1884.

[3] K. Marx, Pre-Capitalist Economic Formations. Grundrisse, p.p. 471-514, 1952.

[4] L. Terry Inca Administration in the Central Highlands: A Comparitive Study. Ann Arbor, University Microfilms International, 1985.

[5] M. K. Chandy, The analysis and solutions for general queueing networks. Proc. Sixth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, Princeton U. Princeton, N.J. pp. 224–228, 1972.

[6] M. Williamson, Markov Chains and Stationary Distributions. Lane Department of Computer Science and Electrical Engineering West Virginia University, 2012.

[7] E. F. Robertson in J. J. O'Connor, Andrei Andreyevich Markov. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Markov/, , 21:47.

[8] P. Pavešić, Osnove teorije verjetnosti. https://www.fmf.uni-lj.si/~pavesic/POUK/BIOKEMIJA/Matematika\%202\%202009-2010/11.pdf, , 10:21.

[9] RadfordMathematics.com, Probability of "A OR B": p(A∪ B) Combined Events Part 2. https://www.radfordmathematics.com/probabilities-and-statistics/probability-fundamentals/compound-events-probability-A-or-B.html, , 10:43.

[10] A. Kolmogorov, Foundations of the Theory of Probability. Chelsea, 1956.

[11] D. Chua, D. R. Grimmett, Part IB — Markov Chains, Theorems With Proof. Michaelmas 2015, 2015.

[12] P. Nandori, Periodicity. Markov, Stat. http://math.bme.hu/~nandori/Virtual_lab/stat/markov/Periodicity.pdf, , 11:39.

[13] Horn, Johnson, Matrix Analysis (2nd ed.). Cambridge University Press, 2013.